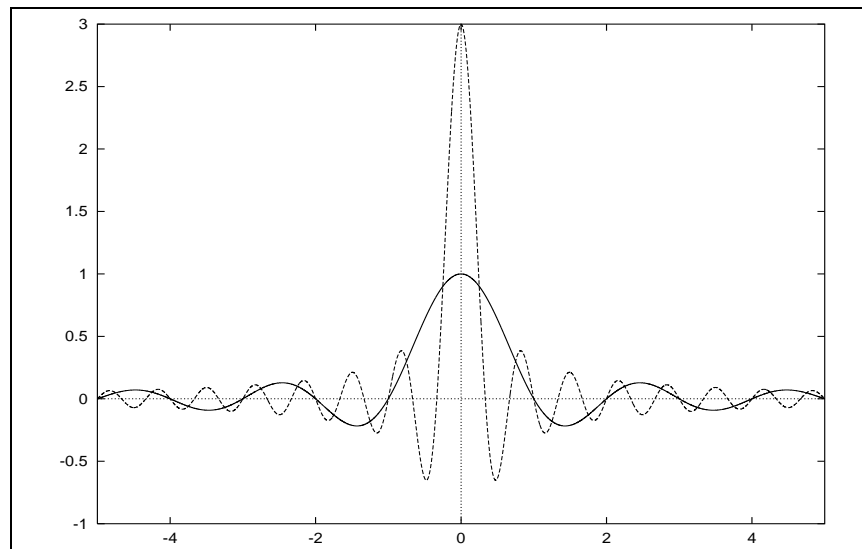


INTRODUCTION AU TRAITEMENT DU SIGNAL



Exercices

Fabrice Heitz, Christian Heinrich, Vincent Noblet

Janvier 2015

Table des matières

1	Signaux : propriétés élémentaires, signaux d'énergie finie	1
2	Signaux et distributions	3
3	Développement en série de Fourier des signaux périodiques	4
4	Transformée de Fourier et produit de convolution	6
5	Intercorrélation, autocorrélation, spectres d'énergie et de puissance	10
6	Systèmes LIT : réponse impulsionnelle, réponse en fréquence, système inverse	12
7	Filtrage	15
8	Modulation, démodulation	19
9	Filtrage adapté, reconnaissance des formes	20
10	Échantillonnage, reconstruction d'un signal	22

Annexe : contrôle de connaissances 2012-2013 / 2013-2014

Planning prévisionnel

Séance	Exercices
1	5, 6, 7, 8
2	9, 10
3	13, 14
4	19, 21
5	39
6	26
7	30, 34, 35
8	37, 38
9	40

1 Signaux : propriétés élémentaires, signaux d'énergie finie

Exercice 1

On considère la fonction $x(t)$ représentée Fig. 1. Représenter graphiquement les fonctions suivantes :

1. $x(-t)$
2. $x(t+2)$
3. $x(2t+2)$
4. $x(1-3t)$

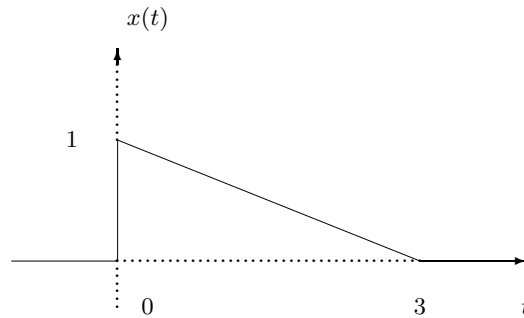


FIGURE 1 – Fonction $x(t)$

Exercice 2

1. Soient $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux périodiques de périodes fondamentales T_1 et T_2 . Sous quelles conditions le signal $x(t) + y(t)$ est-il périodique ? Quelle est la période fondamentale de ce signal ?
2. On considère les signaux :

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos \frac{2\pi t}{3} + 2 \sin \frac{16\pi t}{3} \\ y(t) &= \sin \pi t \end{aligned}$$

Montrer que $z(t) = x(t)y(t)$ est périodique en écrivant $z(t)$ comme une combinaison linéaire de fonctions exponentielles complexes de la forme :

$$z(t) = \sum_k a_k e^{jk(\frac{2\pi}{T})t}$$

Quelle est la période fondamentale de $z(t)$?

Réponses :

1. Condition : $kT_1 = lT_2$, $k, l \in \mathbb{N}$, période fondamentale : $T_0 = \text{PPCM}(T_1, T_2)$
2. $z(t)$ est somme de signaux périodiques de périodes : $T_1 = 6$, $T_2 = \frac{6}{5}$, $T_3 = \frac{6}{13}$, $T_4 = \frac{6}{19}$. Période fondamentale de $z(t)$: $T_0 = 6$.

Exercice 3

L'ensemble des signaux $x(t)$ complexes, d'énergie finie, forme un espace vectoriel de Hilbert sur \mathbb{C} que l'on peut munir d'un produit scalaire défini par :

$$\langle x_1, x_2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t) x_2^*(t) dt$$

Le carré de la norme $\|x\|^2$ représente l'énergie du signal. La distance associée mesure la dissemblance entre deux signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$:

$$d(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\| = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |x_1(t) - x_2(t)|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}$$

1. Déterminer le produit scalaire des signaux $x_1(t) = a \cos(2\pi f_0 t + \theta) \text{rect}_T(t - \frac{T}{2})$ et $x_2(t) = a \sin(2\pi f_0 t + \theta) \text{rect}_T(t - \frac{T}{2})$. En déduire la relation que doivent vérifier T et f_0 pour que ces signaux soient orthogonaux quel que soit θ .
2. Exprimer dans ce dernier cas les signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$ à l'aide de leur énergie commune E .

Réponses :

$$1. \langle x_1, x_2 \rangle = \frac{a^2}{8\pi f_0} [\cos 2\theta - \cos(4\pi f_0 T + 2\theta)].$$

Orthogonalité : $T = \frac{n}{2} T_0, n \in \mathbb{N}^*$

$$2. E_{x_1} = E_{x_2} = \frac{a^2 T}{2}$$

$$x_1(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(2\pi f_0 t + \theta)$$

$$x_2(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \sin(2\pi f_0 t + \theta)$$

Exercice 4

Dans cet exercice, nous établissons quelques propriétés élémentaires des signaux pairs et impairs.

1. Montrer que si le signal $x(t)$ est représenté par une fonction impaire :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = 0$$

2. Montrer que si $x(t)$ est un signal pair et que si $y(t)$ est un signal impair, $x(t)y(t)$ est un signal impair.
3. Soit $x(t)$ un signal quelconque dont les parties paires et impaires sont respectivement notées : $x_p(t)$ et $x_{imp}(t)$. Montrer que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_p^2(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} x_{imp}^2(t) dt$$

2 Signaux et distributions

Exercice 5

La distribution de Dirac $\delta(t)$ (où t est le temps) constitue la représentation mathématique correcte d'une impulsion mécanique ou électrique très brève de sorte que la force mécanique $f(t)$ ou l'intensité du courant $i(t)$ s'écriront, en termes de distribution :

$$\begin{aligned} f(t) &= P\delta(t) \\ i(t) &= Q\delta(t) \end{aligned}$$

Que représentent physiquement les quantités P et Q ?

Exercice 6

Dériver au sens des distributions :

$$\begin{aligned} x(t) &= \text{rect}_T(t) \quad \text{pour } T = 1 \\ x(t) &= \text{sign}(t) = \frac{|t|}{t} \end{aligned}$$

Exprimer $\text{rect}_{T=1}(t)$ et $\text{sign}(t)$ à l'aide de la fonction d'Heaviside $u(t)$ et retrouver les résultats précédents.

Exercice 7

On admettra que si $D(t)$ est une distribution quelconque et si $\Psi(t)$ est une fonction indéfiniment dérivable, on peut appliquer la règle usuelle de dérivation pour dériver la distribution produit $\Psi(t)D(t)$:

$$\frac{d}{dt}\Psi(t)D(t) = D(t)\frac{d}{dt}\Psi(t) + \Psi(t)\frac{d}{dt}D(t)$$

En déduire les dérivées, au sens des distributions, de :

$$\begin{aligned} |t| &= t \text{ sign}(t) \\ \text{rect}_{T=1}(t) \cos \pi t \\ \text{rect}_{T=1}(t) \sin \pi t \end{aligned}$$

Exercice 8

On appelle "circuit dérivateur" le circuit électrique représenté Fig. 2, composé d'une capacité C et d'une résistance R . La tension $V_s(t)$ aux bornes de la résistance est une fonction du temps t , dépendant de la tension $V_e(t)$ appliquée en entrée du circuit.

1. Écrire l'équation différentielle portant sur la charge q prise par le circuit. Vérifier que, lorsque le produit RC tend vers 0, la quantité :

$$\frac{V_s(t)}{RC} \quad \text{tend vers} \quad \frac{d}{dt}V_e(t)$$

(on supposera que $|\ddot{q}(t)|$ reste borné).

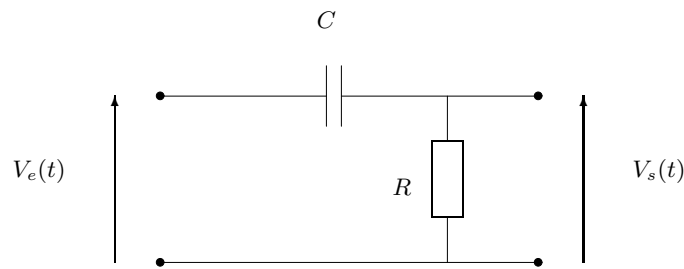


FIGURE 2 – Circuit électrique dérivateur

2. Le circuit étant initialement au repos ($q = 0$), on applique à l'entrée, à l'instant $t = 0$, une tension constante V_0 . Résoudre l'équation différentielle avec ces conditions initiales. En déduire la quantité $\frac{V_s(t)}{RC}$.
 3. Vers quelle limite converge, au sens des distributions, la fonction $\frac{V_s(t)}{RC}$ ainsi trouvée lorsque RC tend vers 0 ?
-

3 Développement en série de Fourier des signaux périodiques

Exercice 9

Déterminer les coefficients du développement en série de Fourier des signaux suivants :

- a) $x(t) = \sin\left(10\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$
- b) $x(t) = 1 + \cos(2\pi t)$
- c) $x(t) = [1 + \cos(2\pi t)] \left[\sin\left(10\pi t + \frac{\pi}{6}\right) \right]$

Exercice 10

Déterminer le développement en série de Fourier des signaux périodiques représentés Fig. 3.

Exercice 11

Soit $x(t)$ un signal périodique, de période fondamentale T_0 et de coefficients de Fourier a_k . Déterminer l'expression des coefficients de Fourier des signaux suivants : $x(t - t_0)$; $x(-t)$; $x^*(t)$; $x(\alpha t)$, $\alpha > 0$.

Réponse : voir table des propriétés des séries de Fourier (annexe du cours)

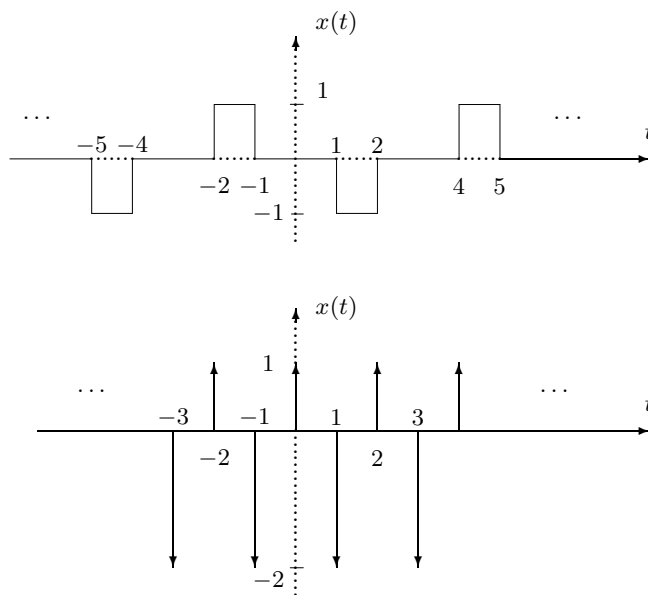


FIGURE 3 – Signaux périodiques

Exercice 12

L'objet de cet exercice est de montrer que la représentation d'un signal périodique par son développement en série de Fourier, ou plus généralement par une combinaison linéaire de fonctions orthogonales est une représentation efficace d'un point de vue calculatoire et qu'elle est utile pour obtenir une bonne approximation du signal.

Soit $\{\Phi_i(t)\}$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, une famille de fonctions orthonormales sur l'intervalle $a \leq t \leq b$ ¹ et $x(t)$ un signal arbitraire de support $[a, b]$. Considérons l'approximation suivante du signal $x(t)$ sur l'intervalle $a \leq t \leq b$:

$$\hat{x}_N(t) = \sum_{i=-N}^{+N} a_i \Phi_i(t) \quad (1)$$

où les coefficients a_i (généralement complexes) sont à déterminer. L'erreur e_N entre le signal $x(t)$ et son approximation $\hat{x}_N(t)$ est définie par :

$$e_N(t) = x(t) - \hat{x}_N(t). \quad (2)$$

Un critère largement utilisé en traitement du signal pour mesurer la qualité de l'approximation est l'énergie du signal d'erreur calculée sur l'intervalle d'intérêt :

$$E = \int_a^b |e_N(t)|^2 dt. \quad (3)$$

1. La famille de fonctions $\{\Phi_i(t)\}$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, est dite orthonormale sur l'intervalle $a \leq t \leq b$ si :

$$\begin{aligned} \int_a^b \Phi_k(t) \Phi_l^*(t) dt &= 0 \text{ pour } k \neq l \\ \int_a^b \Phi_k(t) \Phi_k^*(t) dt &= 1 \end{aligned}$$

1. Montrer que l'énergie E est minimisée pour le choix suivant des a_i :

$$a_i = \int_a^b x(t) \Phi_i^*(t) dt. \quad (4)$$

Interpréter cette relation d'un point de vue géométrique dans l'espace de Hilbert des signaux d'énergie finie sur $[a, b]$.

2. Montrer que les signaux $\Phi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{T_0}} e^{j2\pi n f_0 t}$ sont orthonormaux sur tout intervalle de longueur T_0 . En déduire l'expression des coefficients a_i minimisant l'énergie de l'erreur. Comment se comparent-ils avec les coefficients du développement en série de Fourier de $x(t)$ périodisé ? Commenter.

Réponses :

1. *Indication : poser $a_i = b_i + jc_i$. E est une fonction à valeurs réelles. Le minimum est obtenu pour : $\frac{\partial E}{\partial b_i} = \frac{\partial E}{\partial c_i} = 0$, $i = -N, \dots, N$. Interprétation géométrique : soit $H_2(a, b)$ l'espace de Hilbert engendré par les vecteurs orthonormaux $\Phi_i(t)$, $i = -N, \dots, N$. Les $\Phi_i(t)$ forment une base de $H_2(a, b)$. $\hat{x}_N(t)$ est alors la projection orthogonale de $x(t)$ sur $H_2(a, b)$. On a : $e_N(t) \perp \Phi_i(t)$, $i = -N, \dots, N$, ce qui donne l'équation (4).*
 2. $a_i = \frac{1}{\sqrt{T_0}} \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi i f_0 t} dt$ qui est aussi l'expression des coefficients du développement en série de Fourier du signal $x(t)$ rendu périodique, de période T_0 . On peut en conclure que la décomposition en série de Fourier tronquée à l'ordre N est la meilleure approximation possible du signal $x(t)$ (dans le sens où c'est celle qui minimise E).
-

4 Transformée de Fourier et produit de convolution

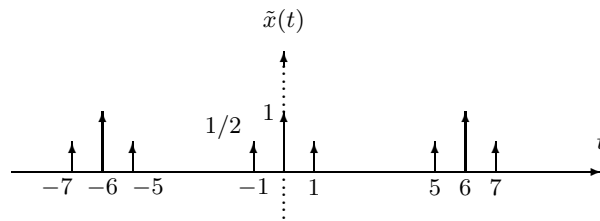
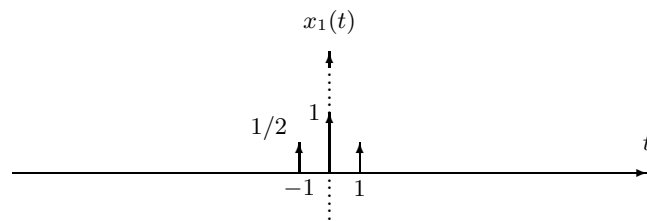
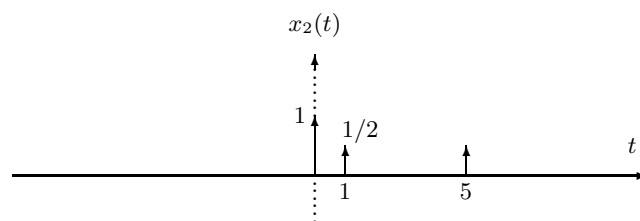
Exercice 13

Déterminer la transformation de Fourier des signaux suivants. Représenter graphiquement les spectres d'amplitude et de phase correspondants. $x(t) = \delta(t - 5)$; $x(t) = e^{-at}u(t)$, $a \in \mathbb{R}^{+*}$; $x(t) = e^{(-1+2j)t}u(t)$

Exercice 14

Considérons le signal périodique $\tilde{x}(t)$ représenté Fig. 4, composé uniquement d'impulsions de Dirac.

1. Quelle est la période fondamentale T_0 de $\tilde{x}(t)$?
2. Donner le développement en série de Fourier de $\tilde{x}(t)$.
3. Déterminer les transformées de Fourier $X_1(f)$ et $X_2(f)$ des signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$ représentés Fig. 5 et Fig. 6.

FIGURE 4 – Signal périodique $\tilde{x}(t)$ FIGURE 5 – Signal apériodique $x_1(t)$ FIGURE 6 – Signal apériodique $x_2(t)$

4. $\tilde{x}(t)$ peut être considéré comme une version périodisée du signal $x_1(t)$ ou $x_2(t)$:

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1(t - kT_1) \quad \text{ou} \\ \tilde{x}(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_2(t - kT_2)\end{aligned}$$

Déterminer T_1 et T_2 .

5. Vérifier que les coefficients du développement en série de Fourier de $\tilde{x}(t)$ sont composés d'échantillons (pondérés) de $X_1(f)$ et $X_2(f)$.

Exercice 15

Déterminer les signaux correspondant aux transformées de Fourier suivantes :

1. $X_a(f) = \frac{1}{7 + j2\pi f}$
2. $X_b(f)$ (Fig. 7)
3. $X_c(f) = \frac{1}{9 + (2\pi f)^2}$
4. $X_d(f) = X_a(f)X_b(f)$

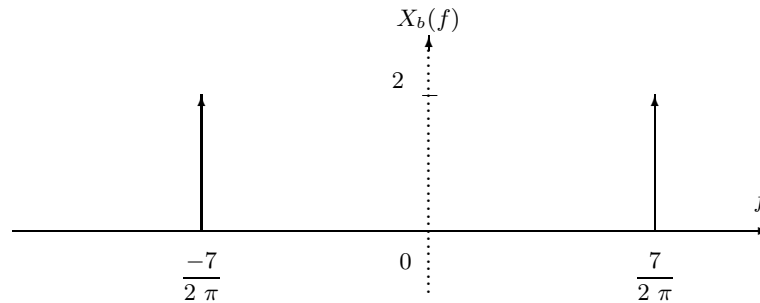


FIGURE 7 – $X_b(f)$

Réponses :

1. $x_a(t) = e^{-7t}u(t)$
2. $x_b(t) = 4 \cos 7t$
3. $x_c(t) = \frac{1}{6}e^{-3|t|}$
4. $x_d(t) = \frac{2\sqrt{2}}{7} \cos(7t - \frac{\pi}{4}) = \frac{2}{7}[\cos 7t + \sin 7t]$

Exercice 16

1. Dans l'exercice 13, nous avons calculé la transformée de Fourier de $x(t) = e^{-at}u(t)$. En déduire la transformée de Fourier de $e^{-a|t|}$.
2. En déduire la transformée de Fourier de :

$$\frac{1}{1+t^2}$$

3. Déterminer la transformée de Fourier de :

$$\frac{1}{1+(3t)^2}$$

- 4.

$$x(t) = A \operatorname{rect}_{2T}(t)$$

$$y(t) = x\left(\frac{t}{2}\right)$$

Représenter $x(t)$, $y(t)$, $X(f)$ et $Y(f)$.

Réponses :

1. $\frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2}$
2. $\pi e^{-|2\pi f|}$
3. $\frac{\pi}{3} e^{-|2\pi \frac{f}{3}|}$
4. $X(f) = 2TA \frac{\sin(2\pi f T)}{2\pi f T}$, $Y(f) = 2X(2f)$.

Exercice 17

Déterminer et représenter le produit de convolution des signaux suivants :

$$x(t) = \operatorname{rect}_{T=4}(t-2) \text{ et } y(t) = x(t) .$$

$$x(t) = e^{-(t-1)}u(t-1) \text{ et } y(t) = u(t+1) .$$

Réponses :

1. $x(t) * y(t) = 4 \operatorname{tri}_{2T=8}(t)$
2. $x(t) * y(t) = (1 - e^{-t})u(t)$

Exercice 18

Soit : $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$ et : $y(t) = \operatorname{tri}_{\Theta}(t)$, $\Theta = 2$.

Pour $T = \frac{3}{2}$, représenter $x(t)$, $y(t)$ et $z(t) = x(t) * y(t)$.

5 Intercorrélation, autocorrélation, spectres d'énergie et de puissance

Exercice 19

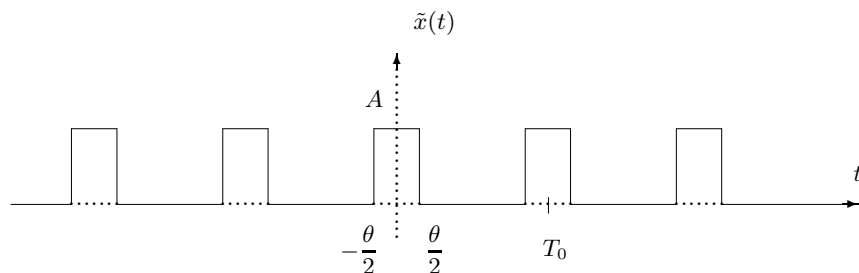


FIGURE 8 – Signal d'horloge

1. Densité spectrale d'énergie d'un signal transitoire.

Soit le signal : $x(t) = A \text{rect}_{\Theta}(t)$ ("créneau" ou "fonction porte").

Calculer la fonction d'autocorrélation $R_x(\tau)$ du créneau $x(t)$. Déterminer son spectre $X(f)$ ainsi que sa densité spectrale d'énergie. Quelle est l'énergie de ce signal ?

2. Densité spectrale de puissance d'un signal périodique.

- Rappeler l'expression des coefficients de Fourier d'un signal périodique en fonction du spectre du signal de base (période élémentaire).
- Calculer le spectre du signal d'horloge représenté Fig. 8 ainsi que sa fonction d'autocorrélation.
- Déterminer la densité spectrale de puissance de ce signal. La tracer. Quel est la puissance de ce signal dans la bande $\left[-\frac{3}{2T_0}, +\frac{3}{2T_0}\right]$? Quelle est sa puissance totale ?

Exercice 20

Calculer la fonction d'intercorrélation $R_{xy}(\tau)$ des signaux suivants :

- $x(t) = 1, y(t) = \sin 2\pi f_0 t$
- $x(t) = e^{-a|t|} \ (a > 0), y(t) = \delta(t)$
- $x(t) = a \cos 2\pi(f_0 t + \Phi), y(t) = a \cos(2\pi f_0 t + \Phi)$
- $x(t) = \sin 2\pi f_0 t, y(t) = \cos 2\pi f_0 t$

Réponses :

- $R_{xy}(\tau) = 0$
- $R_{xy}(\tau) = e^{-a|\tau|}$

$$3. R_{xy}(\tau) = \frac{a^2}{2} \cos 2\pi f_0 \tau$$

$$4. R_{xy}(\tau) = \frac{1}{2} \sin 2\pi f_0 \tau$$

Exercice 21

Le principe du radar consiste à émettre un signal de courte durée $x(t)$ qui, réfléchi par la cible, revient à l'émetteur après une durée θ proportionnelle à la distance de la cible.

Le signal $y(t)$ observé en retour (écho radar) est en général atténué et bruité. On suppose que :

$$y(t) = ax(t - \theta)$$

Montrer que la fonction d'intercorrélation $R_{yx}(\tau)$ atteint son maximum pour $\tau = \theta$. En déduire le principe d'un récepteur radar donnant la distance de la cible.

Exercice 22

On définit la *transformée de Laplace bilatérale* du signal $x(t)$ par :

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt$$

avec : $s = \sigma + j\omega$.

Soit le signal $x(t) = 3e^{2t}u(t) + 4e^{3t}u(t)$.

1. La transformée de Fourier de ce signal existe-t-elle ?
2. Pour quelles valeurs de σ la transformée de Fourier de $x(t)e^{-\sigma t}$ converge-t-elle ?
3. Déterminer la transformée de Laplace bilatérale $X(s)$ de $x(t)$. Représenter la constellation des pôles et zéros de $X(s)$ ainsi que sa région de convergence.

Réponses :

1. Non.
2. $\sigma > 3$.
3. $X(s) = \frac{3}{s-2} + \frac{4}{s-3} = \frac{7(s-\frac{17}{7})}{(s-2)(s-3)}$.

Exercice 23

Déterminer la transformée de Laplace bilatérale, la constellation des pôles et zéros ainsi que la région de convergence de la TL pour les signaux suivants :

1. $e^{-at}u(t) \quad a > 0$
2. $e^{-at}u(t) \quad a < 0$
3. $-e^{-at}u(-t) \quad a < 0$

La transformée de Fourier existe-elle dans chaque cas ?

Réponses :

1. $X(s) = \frac{1}{s+a}$. Converge pour $\sigma > -a$. La TF existe.

2. $X(s) = \frac{1}{s+a}$. Converge pour $\sigma > -a$. La TF n'existe pas.
 3. $X(s) = \frac{1}{s+a}$. Converge pour $\sigma < -a$. La TF existe.
-

6 Systèmes LIT : réponse impulsionnelle, réponse en fréquence, système inverse

Exercice 24

1. En utilisant le produit de convolution, déterminer et représenter les réponses $y_1(t)$ et $y_2(t)$ d'un système linéaire stationnaire de réponse impulsionnelle $h(t) = e^{-\frac{t}{2}}u(t)$ aux entrées suivantes : $x_1(t) = u(t)$; $x_2(t) = 2\text{rect}_\Theta(t - \frac{3}{2})$, $\theta = 3$
2. Exprimer x_2 en fonction de x_1 . En utilisant les propriétés du système, en déduire une expression de y_2 en fonction de y_1 .

Réponses :

1. $y_1(t) = 2(1 - e^{-\frac{t}{2}})u(t)$.
 $y_2(t)$ est défini par :
 - si $t \leq 0$, $y_2(t) = 0$.
 - si $0 \leq t \leq 3$, $y_2(t) = 4(1 - e^{-\frac{t}{2}})$
 - si $3 \leq t$, $y_2(t) = 4e^{-\frac{t}{2}}(e^{\frac{3}{2}} - 1)$
2. $y_2(t) = 2[y_1(t) - y_1(t - 3)]$

Exercice 25

Déterminer *graphiquement* le produit de convolution $x(t) * h(t)$ pour les cas représentés Fig. 9 et 10.

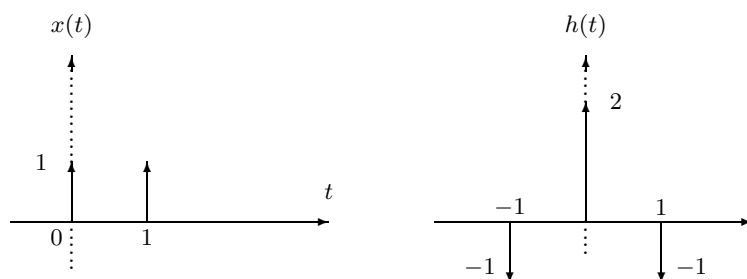


FIGURE 9 – Cas 1

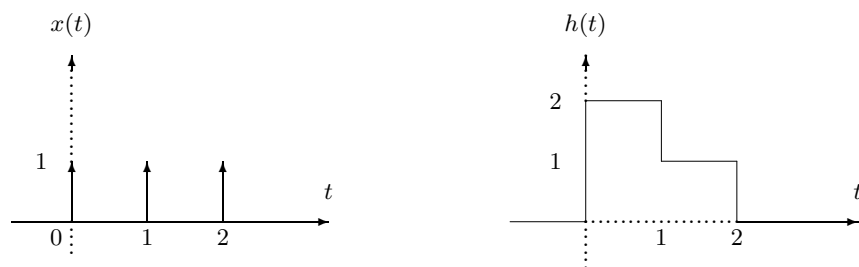


FIGURE 10 – Cas 2

Réponses :

1. $y(t) = -1.\delta(t+1) + \delta(t) + \delta(t-1) - 1.\delta(t-2)$
2. $y(t) = h(t) + h(t-1) + h(t-2)$

Exercice 26 : annulation d'écho

Une application importante du concept de système inverse est l'annulation des échos apparaissant dans certains systèmes acoustiques. Si par exemple un auditorium présente un écho perceptible, une impulsion acoustique émise s'accompagnera d'une série d'échos correspondant à des versions atténuées de l'impulsion initiale, renvoyées à intervalles temporels réguliers. En première approximation, on modélisera ce phénomène par un système linéaire stationnaire de réponse impulsionnelle :

$$h(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} h_k \delta(t - kT) \quad (5)$$

où h_k représente le facteur d'atténuation du $k^{\text{ème}}$ écho.

1. Supposons que $x(t)$ représente le signal acoustique original (le signal musical produit par un orchestre, par exemple) et que :

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad (6)$$

est le signal effectivement perçu (en l'absence de système d'annulation d'écho). Pour atténuer le phénomène d'écho, on utilise un microphone qui capte $y(t)$ et le transforme en un signal électrique qui sera également noté $y(t)$.

Le système d'annulation d'écho va chercher à *inverser* le système représenté par les équations 6 et 5, pour retrouver $x(t)$ à partir de $y(t)$. On montre que le système inverse, linéaire et stationnaire est décrit par les équations suivantes :

$$x(t) = y(t) * g(t) \quad (7)$$

$$g(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k \delta(t - kT) \quad (8)$$

où $g(t)$ représente la réponse impulsionnelle du système inverse.

Montrer que $g(t) * h(t) = \delta(t)$.

En déduire l'expression des paramètres g_k du système inverse en fonction des paramètres h_k du système direct.

Calculer $g(t)$ dans le cas où $h_0 = 1$, $h_1 = \frac{1}{2}$ et $h_i = 0$ pour $i \geq 2$. Retrouver ce dernier résultat en exprimant $G(f)$ en fonction de $H(f)$.

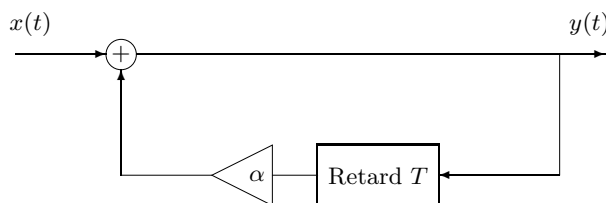


FIGURE 11 – Générateur d'écho

2. Un bon modèle pour la production d'échos est donné Fig. 11. Chaque écho successif est représenté par une version retardée et atténuée du signal.
 - (a) Donner la réponse impulsionnelle de ce système (on supposera que $x(t) = y(t) = 0$ pour $t < 0$).
 - (b) Montrer que ce système est stable si $0 < \alpha < 1$ et instable si $\alpha > 1$. En pratique la condition $0 < \alpha < 1$ est physiquement vérifiée car les échos successifs sont atténués.
 - (c) Donner l'expression de $g(t)$ dans ce cas et en proposer une réalisation à partir d'additionneurs, de multiplieurs et de lignes à retard.

Exercice 27

Considérons un système intégrateur pour lequel la relation entre entrée $x(t)$ et sortie $y(t)$ s'exprime par :

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

Déterminer la relation entre entrée et sortie pour le système inverse.

Réponses :

1. $x(t) = \frac{dy(t)}{dt}$

Exercice 28

La relation entre entrée et sortie d'un système linéaire stationnaire s'exprime par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

1. Déterminer la réponse en fréquence $H(f)$ de ce système. Représenter l'amplitude et la phase de $H(f)$.
2. Si $x(t) = e^{-t}u(t)$, déterminer $Y(f)$.

3. En déduire $y(t)$.

Réponses :

1. $H(f) = \frac{1}{2+j2\pi f}$
2. $Y(f) = \frac{1}{1+j2\pi f} - \frac{1}{2+j2\pi f}$
3. $y(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$

Exercice 29

On considère un système linéaire stationnaire de réponse impulsionnelle : $h(t) = \frac{\sin(4\pi f_0 t)}{t}$.

Calculer la réponse de ce système au signal : $x(t) = \frac{\sin(2\pi f_0 t)}{t}$.

Réponses :

1. $y(t) = \pi \frac{\sin 2\pi f_0 t}{t}$

7 Filtrage

Exercice 30 : filtrage d'un signal périodique

Déterminer la réponse du filtre passe-bas idéal, de réponse en fréquence :

$$H(f) = \text{rect}_{2B}(f)e^{-j2\pi ft_0}, \quad B = \frac{3}{2T_0}$$

au signal périodique $\tilde{x}(t)$ (signal d'horloge) représenté Fig. 12.

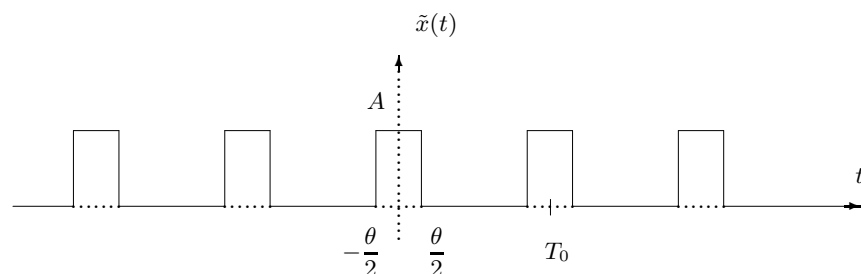


FIGURE 12 – Signal d'horloge

On pourra pour cela décomposer ce signal en série de Fourier.

Exercice 31

On considère le système dont la réponse en fréquence (module et phase) est représentée Fig. 13. Soit :

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \sin \left[2\pi f_1 t + \frac{\pi}{4} \right] \\x_2(t) &= 2 \cos \left[2\pi f_2 t - \frac{\pi}{3} \right]\end{aligned}$$

avec : $f_1 = \frac{1}{2}$ et $f_2 = 1$.

Déterminer la réponse $y(t)$ du système à l'entrée $x_1(t) + x_2(t)$.

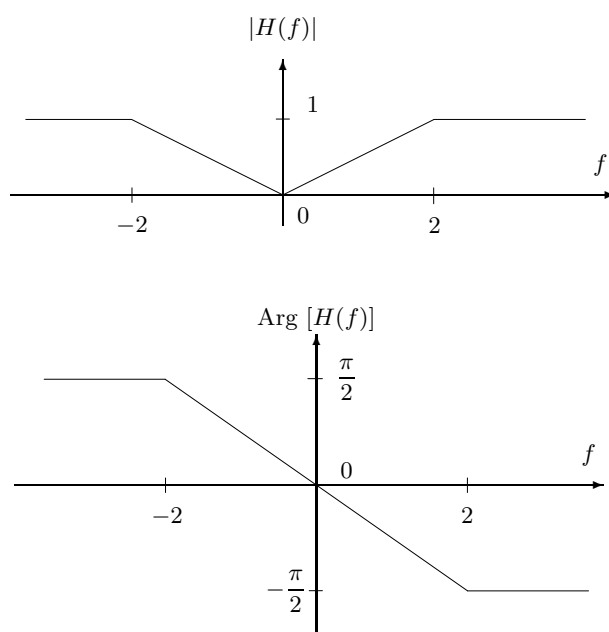


FIGURE 13 – Réponse en fréquence H du système

Réponses :

$$1. \ y(t) = \frac{1}{4} \sin(\pi t + \frac{\pi}{8}) + \cos(2\pi t - 7\frac{\pi}{12})$$

Exercice 32 : circuit RC

On considère le circuit RC représenté Fig. 14.

1. Déterminer la réponse en fréquence $H_1(f)$ du système ayant pour entrée : V_e , pour sortie : V_c . Représenter le module et la phase de $H_1(f)$. Quelles sont les caractéristiques de ce système ?
2. Déterminer la réponse en fréquence $H_2(f)$ du système ayant V_e en entrée et V_r en sortie. Représenter le module et la phase de $H_2(f)$. Quelles sont les caractéristiques de ce système ?
3. Quelles sont les fréquences de coupure de $H_1(f)$ et $H_2(f)$? (on considère la fréquence de coupure à -3 dB).

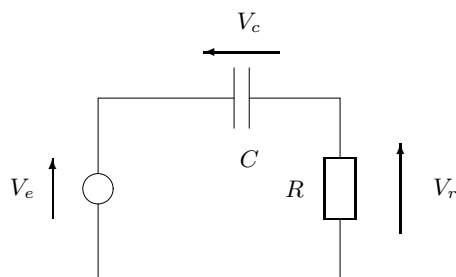


FIGURE 14 – Circuit RC

Exercice 33 : filtres de Butterworth

Les filtres de Butterworth sont conçus pour présenter une réponse en fréquence la plus plate possible dans la bande passante.

La réponse en fréquence du filtre de Butterworth d'ordre n , de pulsation de coupure ω_c vérifie :

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}$$

1. Démontrer que la fonction de transfert $H(s)$ du filtre vérifie :

$$H(s).H(-s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j\omega_c}\right)^{2n}}$$

2. Calculer les pôles et la fonction de transfert des filtres réalisables d'ordre 1, 2 et 3.

Réponses :

1. $|H(j\omega)|^2 = H(j\omega).H^*(j\omega) = H(j\omega).H(-j\omega)$ (car $h(t)$ est réel). On déduit la formule pour $H(s).H(-s)$ en posant $s = j\omega$ et en effectuant le prolongement analytique à tout $s \in \mathbb{C}$.
2. $n = 1$: $H(s) = \frac{1}{(\frac{s}{\omega_c}) + 1}$
 $n = 2$: $H(s) = \frac{1}{(\frac{s}{\omega_c})^2 + \sqrt{2}(\frac{s}{\omega_c}) + 1}$
 $n = 3$: $H(s) = \frac{1}{[(\frac{s}{\omega_c}) + 1][(\frac{s}{\omega_c})^2 + (\frac{s}{\omega_c}) + 1]}$

Exercice 34

On considère le filtre causal de réponse en fréquence $H(f) = +j4\pi f$.

1. Exprimer la relation entre la sortie $y(t)$ et l'entrée $x(t)$ de ce filtre. Quelle est la réponse impulsionnelle $h(t)$ de ce filtre ?
2. Déterminer $y(t)$ pour les entrées $x(t)$ suivantes :

- (a) $x(t) = e^{jt}$
- (b) $x(t) = (\sin 2\pi f_0 t)u(t)$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad X(f) &= \frac{1}{j2\pi f(j2\pi f + 6)} \\ \text{(d)} \quad X(f) &= \frac{1}{j2\pi f + 2} \end{aligned}$$

Exercice 35 : Distorsion d'amplitude et de phase d'un filtre passe-bas

Un signal $x(t)$ de transformée de Fourier de support $[-B, +B]$ se présente à l'entrée de deux filtres $H_1(f)$ et $H_2(f)$ définis par :

$$H_1(f) : \begin{cases} |H_1(f)| &= a & \text{pour } |f| < B \\ \text{Arg}[H_1(f)] &= -2\pi f t_0 + \alpha \sin(\pi \frac{f}{B}), \quad (\alpha \ll 1) & \text{pour } |f| < B \\ H_1(f) &= 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

et

$$H_2(f) : \begin{cases} |H_2(f)| &= a + \alpha \cos(\pi \frac{f}{B}) & \text{pour } |f| < B \\ \text{Arg}[H_2(f)] &= -2\pi f t_0 & \text{pour } |f| < B \\ H_2(f) &= 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement $\text{Arg}[H_1(f)]$ et $|H_2(f)|$ en montrant que ces filtres présentent respectivement de la distorsion de phase et d'amplitude.
2. Exprimer les sorties respectives $y_1(t)$ et $y_2(t)$ de ces filtres, associées au signal d'entrée $x(t)$. Commenter.

Exercice 36 : cascade de deux transformées de Fourier

\mathcal{F} désigne la transformée de Fourier.

1. On considère le système $T[\cdot]$ qui à un signal $x_1(t)$ en entrée fait correspondre en sortie le signal $x_2(t)$ défini par :

$$\begin{aligned} x_2(t) = T[x_1(t)] &= \mathcal{F}(x_1(t)) \Big|_{f=t} \\ &= X_1(f) \Big|_{f=t} \end{aligned} \quad (9)$$

Montrer que $T[\cdot]$ est un système linéaire. Ce système est-il invariant dans le temps ?

2. Démontrer l'identité suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi[(t+\alpha)\alpha']} d\alpha' = \delta(t+\alpha) \quad (10)$$

(On rappelle que : $\mathcal{F}(e^{-j2\pi f_1 t}) = \delta(f + f_1)$)

3. On met en cascade deux systèmes $T[\cdot]$ et on note $x_3(t)$ la sortie de ce nouveau système :

$$x_3(t) = T[x_2(t)] = T[T[x_1(t)]] \quad (11)$$

Donner l'expression de $x_3(t)$ en fonction de $x_1(t)$. Montrer que le système $T \circ T$ produit simplement un renversement du signal se présentant à son entrée.

Réponses :

1. Le système n'est pas invariant dans le temps.
 2. ...
 3. $x_3(t) = x_1(-t)$
-

8 Modulation, démodulation

Exercice 37 : dérive en fréquence en démodulation AM

On considère un système de modulation-démodulation AM synchrone dans lequel le démodulateur est sujet à une légère dérive en fréquence :

$$\begin{aligned} \text{modulation :} \quad & y(t) = x(t) \cos 2\pi f_p t \\ \text{démodulation :} \quad & w(t) = y(t) \cos 2\pi f_d t \\ \text{filtrage passe-bas :} \quad & z(t) = w(t) * h(t) \end{aligned}$$

où $h(t)$ est la réponse impulsionnelle d'un filtre passe-bas tel que : $H(f) = 2 \text{rect}_{2B}(f)$.

La différence de fréquence entre le modulateur et le démodulateur est notée : $\Delta f = f_d - f_p > 0$. On suppose que le signal modulant $x(t)$ est à bande limitée avec $X(f) = 0$ pour $|f| \geq f_M$ et que la fréquence de coupure B du filtre passe-bas vérifie l'inégalité suivante :

$$(f_M + \Delta f) < B < (2f_p + \Delta f - f_M)$$

On suppose par ailleurs que : $f_p \gg f_M$.

1. Montrer que la sortie du filtre passe-bas de démodulation est proportionnelle à $x(t) \cos(2\pi \Delta f t)$.
2. Si le spectre de $x(t)$ est $X(f) = \text{tri}_{2f_M}(f)$, représenter le spectre du signal $z(t)$.

Exercice 38 : système de brouillage de la parole

Pour assurer la confidentialité des informations transmises, certains systèmes de communication (en transmission de la parole par exemple) ont recours à des techniques de brouillage. La structure d'un tel système est présenté Fig. 15 : l'entrée du système $x(t)$ (un signal de parole par exemple) est brouillée pour donner $y(t)$. Après transmission, le signal $x(t)$ est reconstruit à partir de $y(t)$.

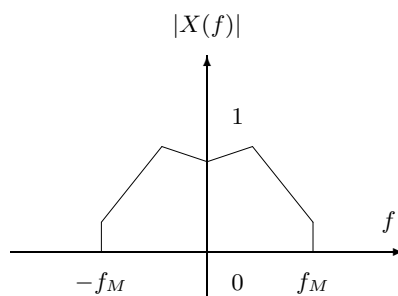
Le spectre de $x(t)$ (resp. $y(t)$) est noté $X(f)$ (resp. $Y(f)$). On suppose que les signaux en entrée du système sont tous réels et à bande limitée : $X(f) = 0$ pour $|f| \geq f_M$.

Le système de brouillage vient permuter différentes bandes de fréquence du signal $x(t)$. De surcroît, le signal de sortie $y(t)$ est contraint à être réel et de même bande limitée que $x(t)$: $Y(f) = 0$ pour $|f| \geq f_M$. L'algorithme de permutation est le suivant :

$$\begin{aligned} Y(f) &= X(f - f_M), & 0 < f < f_M \\ Y(f) &= X(f + f_M), & -f_M < f < 0 \end{aligned}$$



FIGURE 15 – Système de brouillage

FIGURE 16 – Spectre $X(f)$

1. Si $x(t)$ a pour spectre la fonction représentée Fig. 16, représenter le spectre du signal brouillé $y(t)$.
2. En utilisant (si besoin) des amplificateurs, des multiplieurs, des additionneurs, des oscillateurs et des filtres idéaux, proposer un schéma pour un tel système de brouillage.
3. De la même façon, proposer un schéma pour le système de reconstruction à la réception.

9 Filtrage adapté, reconnaissance des formes

Exercice 39 : Filtrage adapté, reconnaissance des formes

On se place dans l'espace des signaux d'énergie finie et de support temporel borné $[a, b]$ qui forme un espace vectoriel de Hilbert noté $\mathcal{L}_2(a, b)$ que l'on munit du produit scalaire défini par :

$$\langle x_1, x_2 \rangle = \int_a^b x_1(t)x_2(t)dt$$

(les signaux sont supposés réels).

Le carré de la norme $\|x\|^2$ représente l'énergie du signal. La distance associée mesure la dissimilitude entre deux signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$:

$$d(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\| = \left[\int_a^b |x_1(t) - x_2(t)|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}$$

Soit un signal $x(t)$ tel que : $x(t) = 0$ pour $t \notin [0, t_1]$.

$x(t)$ est placé à l'entrée d'un filtre linéaire stationnaire de réponse impulsionnelle $h(t)$ et de sortie $y(t)$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

Le problème du filtrage adapté consiste à déterminer le "meilleur" filtre $h(t)$ pour décider de la présence ou de l'absence de ce signal. Ce filtre optimal est appelé le filtre adapté. Il est dérivé ici dans le cas de signaux déterministes (on peut également le dériver lorsque du bruit – composante aléatoire – vient dégrader le signal : on aboutit au même filtre).

On se fixe les contraintes suivantes :

- le filtre est de support limité $[0, t_1]$;
- la sortie du filtre adapté est observée à l'instant $t = t_1$;
- on fixe l'"énergie" du filtre $\|h\|^2$.

1. Montrer que lorsque $x(t)$ est observé en entrée du filtre, la sortie à l'instant $t = t_1$ est maximale pour le choix de $h(t)$ suivant :

$$h(t) = \lambda x(t_1 - t), \quad \lambda > 0 \quad (12)$$

On pourra utiliser l'inégalité de Schwarz :

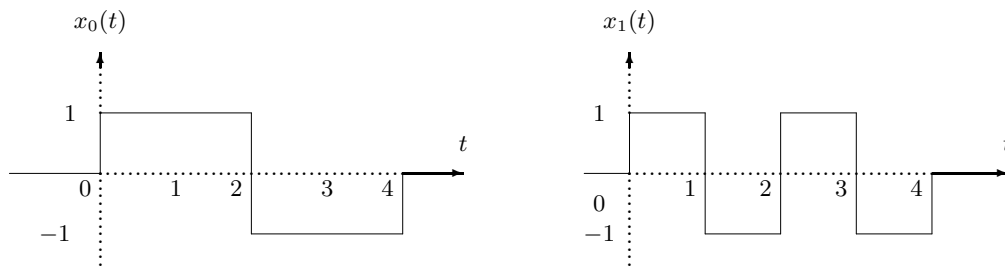
$$| \langle x, y \rangle | \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

et :

$$| \langle x, y \rangle | = \|x\| \cdot \|y\| \Leftrightarrow y = \lambda x$$

A quoi correspond dans ce cas la convolution entre $x(t)$ et $h(t)$?

2. Supposons maintenant que l'on ne connaisse pas l'instant d'arrivée du signal. Au lieu d'observer $x(t)$, on observe $x(t - \theta)$ où θ est inconnu. Montrer que la sortie $z(t)$ du filtre adapté défini par Equ. 12, passe par un maximum à l'instant $t = t_1 + \theta$. En déduire une technique pour déterminer l'instant d'arrivée du signal.
3. On se place dans une situation où plusieurs signaux $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$ (de formes variées mais de mêmes énergies et de même support $[0, t_1]$) peuvent être observés en entrée du filtre $h_0(t)$ adapté à $x_0(t)$. En utilisant à nouveau l'inégalité de Schwarz montrer que la sortie du filtre adapté à $x_0(t)$ est maximale à l'instant $t = t_1$ lorsque le signal se présentant en entrée du filtre est précisément $x_0(t)$. En déduire un système de reconnaissance du signal en entrée (reconnaissance des formes).

FIGURE 17 – Signaux x_0 et x_1

4. Application : reconnaissance des signaux (ou messages) x_0 et x_1 représentés Fig. 17. Soit h_0 et h_1 les filtres adaptés à x_0 et x_1 . Calculer pour $t = 4$ les sorties :

$$y_0(t) = x_0(t) * h_0(t)$$

$$y_1(t) = x_1(t) * h_1(t)$$

$$y_2(t) = x_0(t) * h_1(t)$$

$$y_3(t) = x_1(t) * h_0(t)$$

Conclusion ?

10 Échantillonnage, reconstruction d'un signal

Exercice 40

La plupart des signaux physiques sont de type analogique (amplitude et temps continus). Pour pouvoir les traiter par des systèmes numériques (calculateurs numériques par exemple), il faut au préalable convertir ces signaux analogiques en signaux numériques (à temps discret et à amplitude discrète). La discrétisation du temps correspond à l'opération d'*échantillonnage* dont les propriétés sont étudiées dans cet exercice.

On appelle échantillonnage d'un signal $x(t)$ le prélèvement régulier de valeurs (échantillons) $x(kT_e)$ du signal pour des valeurs discrètes $t = kT_e$ de la variable temporelle t . T_e est appelé période d'échantillonnage, $f_e = \frac{1}{T_e}$ est la fréquence d'échantillonnage.

Lorsqu'un signal est échantillonné, il est important de savoir s'il est possible de le reconstituer à partir de ses échantillons. Cet exercice précise les conditions sous lesquelles il est possible de reconstituer le signal analogique à partir de ses échantillons *sans aucune perte d'information*. Ce principe est actuellement utilisé dans la plupart des systèmes de traitement, de stockage et de

transmission numérique de l'information. Citons entre autres : le disque compact audio, le CD ROM, la téléphonie (autocommutateurs numériques temporels, certains réseaux de téléphone portable), la télévision numérique, les analyseurs de spectre par FFT, les oscilloscopes numériques, etc.

1. Échantillonnage idéal par des impulsions de Dirac

Le signal $x_e(t)$ (signal échantillonné), résultat d'un échantillonnage idéalisé du signal $x(t)$ est représenté par (Fig. 18) :

$$x_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \delta(t - kT_e)$$

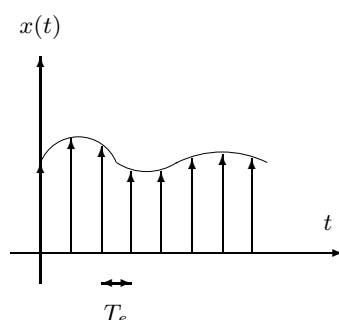


FIGURE 18 – Échantillonnage idéal par des impulsions de Dirac

Le signal $x_e(t)$ défini de la sorte n'a pas de réalité physique, mais contient les mêmes informations que la suite des échantillons du signal initial $x(t)$. Il constitue donc un intermédiaire de calcul commode qui permet d'étudier la perte d'information liée à l'échantillonnage.

On supposera dans la suite le signal $x(t)$ réel et de bande limitée $[-B, +B]$.

- Donner un exemple de spectre possible pour le signal $x(t)$ (représentation graphique uniquement).
- Calculer le spectre du signal échantillonné $x_e(t)$ (ce spectre sera noté $X_e(f)$). Le représenter graphiquement dans les cas suivants : $f_e > 2B$, $f_e = 2B$ et $f_e < 2B$.
- Montrer que dans le cas où $f_e \geq 2B$, il est possible, par filtrage, de reconstituer le signal $x(t)$ à partir du signal $x_e(t)$ *sans aucune perte d'information*. Donner les caractéristiques du filtre de reconstruction.
- En déduire une formule permettant de reconstituer le signal analogique $x(t)$ à partir de ses échantillons $x(kT_e)$, dans le cas où $f_e \geq 2B$ (formule d'interpolation).

Applications : le disque compact audio est utilisé pour stocker de façon numérique des signaux dans la bande de fréquence audible (bande jusqu'à 20 kHz). Quelle est la fréquence minimale d'échantillonnage requise pour une reconstruction parfaite ?

En téléphonie, le signal de parole est échantillonné à $f_e = 8\text{ kHz}$. Quelle est la bande maximale que devrait avoir le signal de parole, avant échantillonnage, pour permettre une reconstruction parfaite à la réception ? Qu'en conclure ?

2. Échantillonnage réel par la fonction porte

En pratique les systèmes d'échantillonnage réels ne réalisent pas d'échantillonnage instantané (tel que celui représenté par l'équation 18). Un échantillonneur-bloqueur, par exemple, réalise un échantillonnage par la fonction porte $p(t) = \text{rect}_a(t - \frac{a}{2})$ (Fig. 19).

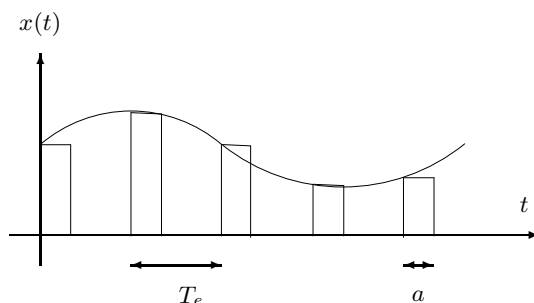


FIGURE 19 – Échantillonnage-blocage

Le signal échantillonné peut être représenté dans ce cas par :

$$x_e(t) = \begin{cases} x(kT_e) & , \text{ si } kT_e < t < kT_e + a \\ 0 & , \text{ sinon} \end{cases}$$

- Calculer $P(f) = \mathcal{F}[p(t)]$
- Calculer $X_e(f) = \mathcal{F}[x_e(t)]$
- En supposant $f_e \geq 2B$ et $B.a \leq 0,1$ représenter graphiquement $X_e(f)$. Quelle est la différence avec l'échantillonnage idéal ? Comment peut-on reconstituer le signal dans ce cas ?

Réponses :

- ...
- $P(f) = a e^{-j\pi f a} \text{sinc}(fa)$
 - $X_e(f) = P(f) \cdot \frac{1}{T_e} [\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - kf_e)]$
 - Graphiquement on voit que $P(f)$ n'affecte pas la partie basse fréquence du spectre (autour de $f = 0$). On peut donc comme précédemment reconstituer le signal, avec le même filtre passe-bas.